2.4 Endomorfismos con un único autovalor

Diagramas de puntos

En esta sección vamos a empezar estudiando endomorfismos con un único autovalor. Aunque parezca un caso muy especial, pronto veremos que si sabemos cómo tratar este tipo de endomorfismo entonces sabremos cómo tratar cualquiera.

Así pues, sea $f : V \to V$ un endomorfismo que tiene un único autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Y supongamos que f tiene respecto de una cierta base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una matriz J de Jordan. Intercambiando la posición de los vectores, es evidente que podemos suponer que los bloques de Jordan que aparecen en J van de mayor a menor orden. Por ejemplo, la matriz

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c} \lambda & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & & & \\ \hline & & & \lambda & 1 & & & \\ & & & 0 & \lambda & & & \\ \hline & & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & 0 & \lambda & \\ \hline & & & & & & & \lambda \end{array}\right)$$

A continuación vamos a mostrar cómo asociar un diagrama de puntos a la matriz J, de forma que nos permita entender mejor su comportamiento (y por tanto, el del endomorfismo f). Expliquemos el método a través de un ejemplo, por ejemplo, con la matriz J anterior. Es decir, que tenemos un endomorfismo $f : \mathbb{K}^8 \to \mathbb{K}^8$ y una base $B = \{v_1, \ldots, v_8\}$ respecto de la cual su matriz es J. El primer bloque nos indica que v_1 es un autovector, es decir $v_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I) = E_1(\lambda)$, y que se tienen las dos siguientes igualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} f(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \Longleftrightarrow v_1 = (f - I\lambda)(v_2) \\ f(v_3) = v_2 + \lambda v_3 \Longleftrightarrow v_2 = (f - I\lambda)(v_3) \end{array} \right.$$

Es decir, que v_1 lo obtenemos aplicando al vector v_2 la aplicación $f - \lambda I$ y a su vez v_2 lo obtenemos aplicando al vector v_3 la aplicación $f - \lambda I$. Dicho esto, escribimos el siguiente diagrama de puntos

$$\bullet_{v_1} \quad \longleftarrow \quad \bullet_{v_2} \quad \longleftarrow \quad \bullet_{v_3}$$

Los puntos representan, de izquierda a derecha, los vectores v_1, v_2, v_3 y la flecha $\longleftarrow$ representa que el vector de la izquierda se calcula aplicando la función $f - \lambda I$ al vector de la derecha. Observemos que $v_2 \in E_2(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda I)^2$ dado que

$$(f - I\lambda)^2(v_2) = (f - \lambda I)(f - \lambda I)(v_2) = (f - \lambda I)(v_1) = 0$$

pero $v_2 \notin E_1(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$, ya que en caso contrario se tendría que $v_1 = (f - \lambda I)(v_2) = 0$, lo cual es absurdo porque v_1 forma parte de una base. Razonando de forma parecida tenemos que $v_3 \in E_3(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda I)^3$ pero $v_3 \notin E_2(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda I)^2$. Esto lo podemos representar poniendo encima de cada punto

$$\begin{array}{ccccc} E_1(\lambda) & \hookrightarrow & E_2(\lambda) & \hookrightarrow & E_3(\lambda) \\ \bullet_{v_1} & \longleftarrow & \bullet_{v_2} & \longleftarrow & \bullet_{v_3} \end{array}$$

Sigamos construyendo el diagrama. Ahora pasamos al siguiente bloque de orden 2. Razonando de forma parecida a como hemos hecho anteriormente, tenemos que $v_4 \in E_1(\lambda)$

es un autovector y $v_4 = (f - \lambda I)(v_5)$. Y de nuevo $v_5 \in E_2(\lambda)$ pero $v_5 \notin E_1(\lambda)$. Para representar este nuevo bloque escribimos una línea de puntos debajo de la anterior,

$$\begin{array}{ccccc} E_1(\lambda) & \hookrightarrow & E_2(\lambda) & \hookrightarrow & E_3(\lambda) \\ \bullet_{v_1} & \longleftarrow & \bullet_{v_2} & \longleftarrow & \bullet_{v_3} \\ \bullet_{v_4} & \longleftarrow & \bullet_{v_5} & & \end{array}$$

Lo mismo hacemos con el último bloque de orden 2 y el bloque de orden 1, quedando finalmente el diagrama como

$$\begin{array}{ccccc} E_1(\lambda) & \hookrightarrow & E_2(\lambda) & \hookrightarrow & E_3(\lambda) \\ \bullet_{v_1} & \longleftarrow & \bullet_{v_2} & \longleftarrow & \bullet_{v_3} \\ \bullet_{v_4} & \longleftarrow & \bullet_{v_5} & & \\ \bullet_{v_6} & \longleftarrow & \bullet_{v_7} & & \\ \bullet_{v_8} & & & & \end{array}$$

De esta forma hemos llegado a un *diagrama de puntos*, tal que:

R_1) los puntos representan exactamente $\dim(V)$ vectores linealmente independientes de V, que son por tanto una base de V,

R_2) la flecha $\longleftarrow$ simboliza que el vector que representa el punto de la izquierda se obtiene aplicando a $(f - \lambda I)$ al vector que representa el punto de la derecha.

R_3) los puntos en la columna debajo de $E_i(\lambda)$ representan vectores que pertenecen a $E_i(\lambda)$ (en realidad solo es necesario para $i = 1$, para el resto vendrá dado por R_1 y R_2).

Y tan solo con estas dos propiedades hemos razonado también que tenemos una propiedad más fuerte que R_3:

> *Los puntos en la columna debajo de $E_i(\lambda)$ representan vectores que pertenecen a $E_i(\lambda)$, y ninguno de ellos pertenece a $E_{i-1}(\lambda)$.*

De hecho, trabajando un poquito más, podemos llegar a que:

> *Ninguna combinación lineal de los vectores que están representados por puntos que están debajo de un $E_i(\lambda)$ pertenece a $E_{i-1}(\lambda)$, excepto la combinación nula.*

En efecto, ya hemos argumentado que el punto que aparece en la columna de la derecha representa un vector en $E_3(\lambda)$ que *no* pertenece a $E_2(\lambda)$, y por tanto ningún múltiplo suyo (excepto el nulo) pertenecerá a $E_2(\lambda)$. Veamos ahora que en nuestro ejemplo los tres puntos que aparecen en la columna central representan tres vectores que pertenecen a $E_2(\lambda)$ con la propiedad de que ninguna combinación lineal de ellos no nula pertenece a $E_1(\lambda)$. Si existieran $a, b, c \in \mathbb{K}$ tales que

$$av_2 + bv_5 + cv_7 \in E_1(\lambda)$$

entonces

$$a(f - \lambda I)(v_2) + b(f - \lambda I)(v_5) + c(f - \lambda I)(v_7) = 0,$$

es decir

$$av_1 + bv_4 + cv_6 = 0,$$

de lo que deducimos $a = b = c = 0$ porque los vectores v_1, v_4, v_6 son linealmente independientes. Obsérvese que este argumento va a funcionar en general, porque dados los vectores representados por puntos en una columna debajo de $E_i(\lambda)$, si una combinación de ellos pertenece a $E_{i-1}(\lambda)$, entonces la combinación con los mismos coeficientes de sus imágenes por medio de $(f - \lambda I)^{i-1}$ nos va a dar 0, lo cual implica que los coeficientes son todos cero ya que esas imágenes sabíamos que eran linealmente independientes (porque son vectores representados por puntos debajo de $E_1(\lambda)$).

El papel que ha jugado la base B es ciertamente auxiliar: solo hemos utilizado las propiedades que los vectores de dicha base deben tener si f respecto de ella tiene matriz J, no nos importan quienes son los vectores en concreto. Así pues, escribiremos el diagrama anterior como

$$\begin{array}{ccccc}
E_1(\lambda) & \hookrightarrow & E_2(\lambda) & \hookrightarrow & E_3(\lambda) \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

Eso sí, puesto que cada punto corresponde a un vector de la base, lo único que sí deberíamos tener presente en adelante es cuál es el orden que ocupan dichos vectores en la base. La respuesta es fácil: debemos empezar por la primera línea y ordenar de izquierda a derecha, para luego continuar con la segunda línea, de izquierda a derecha, y así sucesivamente. Es decir, que debemos seguir el orden que usamos cuando leemos un libro.

El diagrama de puntos es útil porque nos permite calcular fácilmente las dimensiones de los subespacios propios generalizados. En efecto, si contamos los puntos es evidente que $\dim(E_3(\lambda)) = 8$. El punto que aparece en la columna de la derecha representa un vector que *no* pertenece a $E_2(\lambda)$, y dado que en $E_2(\lambda)$ tenemos al menos 7 vectores linealmente independientes, deducimos $\dim(E_2(\lambda)) = 7$. Vayamos con la dimensión de $E_1(\lambda)$. Ya sabemos que los vectores que representan los puntos en la columna debajo de $E_1(\lambda)$ son linealmente independientes y por tanto al menos sabemos que $\dim(E_1(\lambda)) \geq 4$. Queremos ver que de hecho se da la igualdad. También sabemos que los tres puntos que aparecen en la columna central representan tres vectores de $E_2(\lambda)$ con la propiedad de que ninguna combinación lineal de ellos pertenece a $E_1(\lambda)$. Denotemos con W al subespacio que generan esos tres vectores. Por tanto sabemos que $E_1(\lambda) \bigoplus W = E_2(\lambda)$, de lo que deducimos que

$$\dim(E_1(\lambda)) + \dim(W) = \dim(E_2(\lambda)) \quad \Rightarrow \quad \dim(E_1(\lambda)) + 3 = 4$$

es decir, $\dim(E_1(\lambda)) = 4$. Es decir, que *los puntos de las columnas sumados de izquierda a derecha nos da la dimensión de los subespacios generalizados*,

$$\dim(E_1(\lambda)) = 4, \qquad \dim(E_2(\lambda)) = 7, \qquad \dim(E_3(\lambda)) = 8.$$

Y esto de nuevo es general, solo hemos usado la propiedad de que ninguna combinación lineal de los vectores que están representados por puntos que están debajo de un $E_i(\lambda)$ pertenece a $E_{i-1}(\lambda)$, excepto la combinación nula. En particular, tenemos la siguiente consecuencia:

■ **Corolario** *Dado f un endomorfismo con un único autovalor, si f tiene matrices de Jordan respecto de dos bases distintas, entonces dichas matrices deben tener el mismo número de bloques de Jordan.*

Demostración. Si ordenamos los bloques de mayor a menor de dicha matrices y hacemos sus diagramas nos deben quedar iguales. En caso contrario, tendríamos dos dimensiones distintas para algún subespacio propio generalizado de f, lo cual es absurdo. □

Pero incluso más importante para nosotros es que de igual manera que hemos asociado a una matriz de Jordan un diagrama de puntos, podemos asociar a un diagrama de puntos una matriz de Jordan. Así por ejemplo, si nos dicen que tenemos un endomorfismo $f : V \to V$, donde $\dim(V) = 8$, y que tenemos una base B de V de forma que asociando vectores a puntos podemos construir el siguiente diagrama con las reglas R_1,R_2,R_3 anteriores

$$\begin{array}{ccccc} E_1(\lambda) & \hookrightarrow & E_2(\lambda) & \hookrightarrow & E_3(\lambda) \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \end{array}$$

entonces f respecto de esa base B tiene matriz de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{ccc:ccc:cc} \lambda & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & & & \\ \hdashline & & & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \lambda & & \\ \hdashline & & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

En efecto, tenemos tanto bloques como líneas tiene nuestro diagrama, y el orden de cada bloque viene dado por el número de puntos en la línea. Además vemos que el número de puntos debajo de la columna $E_1(\lambda)$ debe ser igual $\dim(E_1(\lambda))$, y el número de puntos debajo de la columna $E_i(\lambda)$ debe ser igual $\dim(E_{i-1}(\lambda)) - \dim(E_i(\lambda))$ para $i > 1$.

Con esta idea en la cabeza, veamos cómo construir una base B de cualquier endomorfismo $f : V \to V$ con un único autovalor respecto de la cual la matriz de f es una matriz de Jordan.

Teorema de Jordan de endomorfismos con un único autovalor

Recordar que estamos dando por ciertos los Teoremas A y B de la sección anterior.

■ **Teorema** (de Jordan con un único autovalor) *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo con un único autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces existe una base B respecto de la cual f tiene una matriz de Jordan.*

Demostración. Sea $k = \mathrm{nil}(\lambda)$ y por tanto $M(\lambda) = E_k(\lambda)$. La idea de la demostración es construir una base que corresponda a un diagrama de una matriz de Jordan como hemos visto en la sección anterior. Recuérdese que por el Teorema A se tiene que

$$\dim(M(\lambda)) = \mathrm{mult}_a(\lambda) = \dim(V).$$

Consideremos una base B_{k-1} de $E_{k-1}(\lambda)$ y sean vectores $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de forma que la unión de todos $B_{k-1} \cup \{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de V. Observamos que $r = \dim(E_k(\lambda)) - \dim(E_{k-1}(\lambda))$ y que ninguna combinación lineal de los vectores

$$\{v_1, \ldots, v_r\}$$

pertenece a $E_{k-1}(\lambda)$. A continuación calculamos las sucesivas imágenes de cada $v_1, \ldots, v_r$ por medio de la aplicación $f - \lambda I$, y empezamos a construir nuestro diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{k-1}(\lambda) & \hookrightarrow & E_k(\lambda) \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots^{(r)} \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \end{array}$$

En efecto, en general para cualquier vector $v \in V$ y cualquier $\ell = 2, 3, \ldots$ se tiene que

$$v \in E_\ell(\lambda) \Leftrightarrow (f - \lambda I)^\ell(v) = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda I)^{\ell-1}(f - \lambda I)(v) = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda I)(v) \in E_{\ell-1}(\lambda) \quad (*)$$

Observamos también que si una combinación lineal de los vectores

$$(f-\lambda I)(v_1), \ldots, (f-\lambda I)(v_r)$$

pertenece a $E_{k-2}(\lambda)$, es decir,

$$a_1(f-\lambda I)(v_1) + \ldots + a_r(f-\lambda I)(v_r) \in E_{k-2}(\lambda)$$

entonces $(f-\lambda I)(a_1v_1+\cdots+a_rv_r) \in E_{k-2}(\lambda)$, y en particular $a_1v_1+\cdots+a_rv_r \in E_{k-1}(\lambda)$, lo cual quiere decir que $a_1 = \ldots = a_r = 0$. Así que ninguna combinación no nula de los vectores anteriores pertenece a $E_{k-2}(\lambda)$ (en particular, estos vectores son linealmente independientes).

A continuación, fijamos una base cualquiera B_{k-2} de $E_{k-2}(\lambda)$. Si unimos esta base a los vectores que vienen representados por los puntos debajo de $E_{k-1}(\lambda)$, es decir,

$$B_{k-2} \cup \{(f-\lambda I)(v_1), \ldots, (f-\lambda I)(v_r)\}, \tag{$\bigstar$}$$

obtenemos un conjunto de vectores linealmente independientes de $E_{k-1}(\lambda)$. Claro, si existe una combinación de ellos, entonces tendremos que

$$v + w = 0,$$

donde v es la combinación de los vectores en B_{k-2} y w es la combinación de los vectores $\{(f-\lambda I)(v_1), \ldots, (f-\lambda I)(v_r)\}$. En particular, $w = -v \in E_{k-2}(\lambda)$. Como la combinación de los vectores $\{(f-\lambda I)(v_1), \ldots, (f-\lambda I)(v_r)\}$ que forman w pertenece a $E_{k-2}(\lambda)$, deducimos que esa combinación debe ser nula. Por tanto también $v = 0$, y como v era una combinación de vectores de la base B_{k-2}, también deducimos que debe ser una combinación nula.

Finalmente, añadimos vectores $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ a los vectores en ($\bigstar$) hasta obtener una base de $E_{k-1}(\lambda)$. Escribimos ℓ puntos en la columna de $E_{k-1}(\lambda)$ debajo de los que ya teníamos y calculamos las imágenes de todas esa columna por medio de $f-\lambda I$, es decir,

$$\begin{array}{ccccc}
E_{k-2}(\lambda) & \hookrightarrow & E_{k-1}(\lambda) & \hookrightarrow & E_k(\lambda) \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\vdots & & \vdots & & \vdots^{(r)} \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\
\vdots & & \vdots^{(\ell)} & & \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & &
\end{array}$$

Obsérvese que por definición ninguna combinación lineal de los vectores que representan los puntos debajo de $E_{k-1}(\lambda)$ puede pertenecer a $E_{k-2}(\lambda)$.

Aplicando repetidamente esta construcción llegamos a un diagrama de puntos de la forma

$$\begin{array}{cccccccc}
E_1(\lambda) & \hookrightarrow & \ldots & E_{k-2}(\lambda) & \hookrightarrow & E_{k-1}(\lambda) & \hookrightarrow & E_k(\lambda) \\
\bullet & \longleftarrow & \ldots & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots^{(r)} \\
\bullet & \longleftarrow & \ldots & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\bullet & \longleftarrow & \ldots & \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots^{(\ell)} & & \\
\bullet & \longleftarrow & \ldots & \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
\bullet & \longleftarrow & & \bullet & & & & \\
\bullet & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & &
\end{array}$$

donde la flecha $\longleftarrow$ simboliza que el vector que representa el punto de la izquierda se obtiene aplicando a $(f - \lambda I)$ al vector que representa el vector de la derecha, y que los vectores que vienen representados por los puntos en una misma columna $E_i(\lambda)$ satisfacen que ninguna combinación no nula de ellos pertenece a $E_{i-1}(\lambda)$, y que por tanto son en particular linealmente independientes. Además, por construcción vamos a tener en total $\dim(V)$ puntos, ya que la suma de todos los puntos debe ser igual a la dimensión de $E_k(\lambda)$, que ya sabemos que es igual a $\dim(V)$.

Así que lo único que nos falta por argumentar es que los vectores que hemos encontrado y que están representados en el diagrama son linealmente independientes. Si fuese así, formarían una base para la cual tenemos un diagrama de puntos con las propiedades $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \mathsf{R}_3$ y por tanto f respecto de esta base tendrá una matriz de Jordan.

Pero probar que estos vectores son linealmente es muy fácil. Los vectores que vienen representados por puntos debajo de la columna $E_1(\lambda)$ son linealmente independientes por construcción. Ninguna combinación no nula de los vectores representados por puntos debajo de la columna $E_2(\lambda)$ pertenece a $E_1(\lambda)$ y por tanto los vectores de las dos primeras columnas son linealmente independientes. Si seguimos este argumento ascendente llegamos a que todos los vectores son linealmente independientes. $\square$

Observación 2.1 En realidad para probar el teorema anterior solo hemos usado el Teorema A para asegurarnos que $V = M(\lambda)$. En el caso de que ya supíesemos que $V = M(\lambda)$ por algún otro motivo, entonces igualmente tendremos el resultado.

Ejemplo 1 Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente su único autovalor es $\lambda = -2$. Calculemos primero las dimensiones de los subespacios propios generalizados. Para ello tenemos que calcular las distintas potencias de $A - (-2)I$, que son

$$[A - (-2)I]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A - (-2)I]^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \dim(E_1(-2)) = 5 - \operatorname{rg}(A - (-2)I) = 2 \\ \dim(E_2(-2)) = 5 - \operatorname{rg}(A - (-2)I)^2 = 4 \\ \dim(E_3(-2)) = 5 - \operatorname{rg}(A - (-2)I)^3 = 5 \end{cases}$$

Así pues, nuestro diagrama de puntos será

$$\begin{array}{ccccc} E_1(-2) & \hookrightarrow & E_2(-2) & \hookrightarrow & E_3(-2) \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \end{array}$$

y la matriz A será semejante a la matriz de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -2 & 1 \\ & & & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Calculemos una base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de $\mathbb{R}^5$ respecto de la cual el endomorfismo f tiene la matriz J anterior. Lo hacemos siguiendo el método de la demostración del Teorema de Jordan con único autovalor.

Calculemos primero una base de $E_2(-2)$, es decir, buscamos $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{[A-(-2)I]^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto sacamos que

$$E_2(-2) = L[(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)]$$

A continuación, buscamos un vector que añadido a la base anterior de $E_2(-2)$ que hemos calculado, nos de una base de $E_3(-2) = \mathbb{R}^5$. Basta tomar el vector

$$v_3 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Este vector será el que representa el punto debajo de $E_3(-2)$, por eso lo hemos denotado con v_3. A continuación, calculamos su imágen por medio de $f - (-2)I$, obteniendo

$$v_2 = (f - (-2)I)(v_3) = (5, 7, 8, 0, 0)$$

A continuación calculamos una base de $E_1(-2)$, es decir, buscamos $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{[A-(-2)I]} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto sacamos que

$$E_1(-2) = L[(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)]$$

Ya sabemos que el vector v_2 es independiente de $(1, 0, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0, 0)$, y necesitamos un vector que unido a estos tres vectores nos de una base de $E_2(-2)$. Podemos tomar

$$v_5 = (0, 0, 0, 1, 0).$$

Por último, calculamos las imágenes de v_2 y v_5 por medio de $f - (-2)I$ para obtener los vectores v_1 y v_4 respectivamente,

$$\begin{cases} v_1 = (f - (-2)I)(v_2) = (24, 0, 0, 0, 0) \\ v_4 = (f - (-2)I)(v_5) = (4, 6, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Finalmente, hemos llegado que la matriz de f respecto de la base

$$B = \{\underbrace{(24,0,0,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(5,7,8,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,0,1)}_{v_3}, \underbrace{(4,6,0,0,0)}_{v_4}, \underbrace{(0,0,0,1,0)}_{v_5}\}$$

es la matriz de Jordan J.

Observación Al construir una base respecto de la cual un endomorfismo f tiene una matriz de Jordan, nos enfrentamos varias veces al problema de poseer unos cuantos vectores linealmente independientes de $E_k(\lambda)$ y tener que que buscar unos cuantos más de forma que, cuando se los añadimos a los que ya tenemos, nos quede una base de $E_k(\lambda)$. En el ejemplo anterior lo hemos podido hacer a ojo, pero lo suyo sería tener un método general. Lo mostramos con un ejemplo. Supongamos que en $\mathbb{R}^5$ tenemos un subespacio vectorial

$$W = L[(4,6,6,2,5),(1,0,-1,1,3),(0,3,5,1,1),(2,1,2,0,0)]$$

y que sabemos que

$$v_1 = (1,2,0,0,1), v_2 = (0,-2,-8,0,3)$$

son dos vectores linealmente independientes de W. Queremos encontrar otros dos vectores v_3 y v_4 tales que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sea una base de W. Tan solo tenemos que poner los vectores v_1 y v_2 y los de la base de W que ya conocemos como filas de una matriz, y escalonar,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{escalonamos} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya sabemos que las operaciones elementales en filas respetan la dependencia lineal, es decir, que el subespacio que generaban las filas de la matriz de la izquierda (que evidentemente es W) es el mismo que el que generan las filas de la matriz de la derecha. Así pues, podemos tomar

$$v_3 = (0,0,14,2,-2) \qquad v_4 = (0,0,0,2,\frac{9}{2})$$